《目次》

第１講　極限 …… 2
第２講　面積 …… 4
第３講　積分評価 …… 6
第４講　体積，複素数 …… 8

《第１講　極限》

1　n を 3 以上の自然数とする．当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある．くじを引いて，当たりなら持ち点に 1 を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする．最初の持ち点は 0 とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す．k を 0 以上の整数とする．n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする．

(1)　確率 $p_n(k)$ を求めよ．

(2)　$\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$ であることを用いてもよい．

(3)　$p(k)=\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める．値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ．

2 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は次の関係式をみたすとする.

$$f(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\,dt$$

$$g(x) = (2-x)e^{-x} - \pi\sin(\pi x) + 2f'(1) + 2$$

以下の問に答えよ.

(1) $f'(1)$ の値を求めよ.

(2) x を $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とするとき,

$$x^2 - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x) \leqq x^2$$

であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x\sin x}$ を求めよ.

《第２講　面積》

3　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の座標が，次のように与えられているとする．

$$(x(t),\ y(t))=(F(t)\cos t,\ F(t)\sin t)$$

ここで，$F(t)=\int_0^t e^{\theta}\sin\theta\,d\theta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$t=0$，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ における点Pの座標をそれぞれ求めよ．

(2)　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x(t)>0$，$y(t)>0$，$\dfrac{dy(t)}{dt}>0$ であることを示せ．

(3)　変数 t が $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くときPによって描かれる曲線と，y 軸によって囲まれる図形の面積は，次の定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}\,dt$$

の値と等しいことを示せ．

4　曲線 $x^2-y^2=-4$ のうち $y>0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

(2)　$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

(3)　p を正の数とし，C 上の点 $\left(p,\ \sqrt{p^2+4}\right)$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

(4)　$\lim\limits_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

《第３講　積分評価》

5　a を自然数とする．

(1)　すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)　$a\geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ．

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3)　級数の極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ．

6 各自然数 n に対して，初項 $n-1$，公差 2 の等差数列を考える．この等差数列の最初の n 項の和を a_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_n を n の式として表せ．

(2) 自然数 $k \geqq 1$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の和

$$S(k)=\sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k の式として表せ．

(3) $S(k)$ を(2)で定めた和とする．次の等式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

を示せ．

《第４講　体積，複素数》

7　$f(x)=e^x\sin x$，$g(x)=a\sin x$ とする．ただし a は 0 以上の実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　b を定数とし

$$I=\int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx,\quad J=\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx$$

とおく．このとき，

$$I+J=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b,\quad I-J=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$$

が成り立つことを示し，I と J を求めよ．

(2)　$f(x)=g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ．

(3)　(2)で求めた実数を x_0 とする．$0\leqq x\leqq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

8　複素数 α，β，γ が表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，C とし，複素数平面の原点を O で表す．ただし，A$\neq$B，A$\neq$O とする．以下の問いに答えよ．

(1)　方程式 $\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線であることを示せ．

(2)　$|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，方程式 $z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$ を満たすことを示せ．

(3)　$|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は，方程式 $z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$ を満たすことを示せ．

テキスト解答

《第１講　極限》

1　n を 3 以上の自然数とする．当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある．くじを引いて，当たりなら持ち点に 1 を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする．最初の持ち点は 0 とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す．k を 0 以上の整数とする．n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする．

(1)　確率 $p_n(k)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$ であることを用いてもよい．

(3)　$p(k)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める．値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ．

【答】　(1)　$\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき})\\ 0 & (n+1\leqq k \text{ のとき})\end{cases}$　(2)　$\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}$　(3)　1，2

【解説】　(1)　$0\leqq k\leqq n$ のとき，n 回の試行で k 回の当たりの選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りで，それらすべて同じ確率の $\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k}$ なので

$$\begin{aligned}p_n(k) &= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

また，$n+1\leqq k$ のときは k 回の当たりを引くことはできないので $p_n(k)=0$．

以上より $p_n(k)=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき})\\ 0 & (n+1\leqq k \text{ のとき})\end{cases}$

(2)　$n\to\infty$ なので $0\leqq k\leqq n$ と考えてよく，$k\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}p_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdots\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+2}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-k}\\ &\to \frac{2^k}{k!}e^{-2}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

となる．

また，$k=0$ のときは

$$p_n(k)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2}\ \ (n\to\infty)$$

となることより，$k\geqq 0$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$.

(3)　$k\geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} p(k+1)-p(k) &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}e^{-2}-\frac{2^k}{k!}e^{-2} \\ &= \frac{2^k}{(k+1)!}e^{-2}(1-k) \end{aligned}$$

であることより，$k<1$ つまり $k=0$ のとき $p(k+1)-p(k)>0$．ゆえに $p(0)<p(1)$.

$k=1$ のとき $p(k+1)-p(k)=0$．ゆえに $p(1)=p(2)$.

$k>1$ つまり $k=2,\ 3,\ \cdots$ のとき $p(k+1)-p(k)<0$．ゆえに $p(2)>p(3)>p(4)>\cdots$.

以上より $p(k)$ が最大となる k は $k=1,\ 2$.

2 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は次の関係式をみたすとする．

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)g(t)\,dt \\ g(x) &= (2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)+2f'(1)+2 \end{aligned}$$

以下の問に答えよ．

(1) $f'(1)$ の値を求めよ．

(2) x を $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とするとき，

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x) \leqq x^2$$

であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x\sin x}$ を求めよ．

【答】 (1) -1　　(2) 略　　(3) 1

【解説】 (1) $\{(x-1)e^{-x}\}'=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})=(2-x)e^{-x}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)\,dt &= \Big[(t-1)e^{-t}+\cos(\pi t)+\{2f'(1)+2\}t\Big]_0^1 \\ &= 2f'(1)+1 \end{aligned}$$

である．また $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt-\int_0^x tg(t)\,dt$ より $f'(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ なので

$$f'(1)=\int_0^1 g(t)\,dt \iff f'(1)=2f'(1)+1 \quad \therefore\ f'(1)=-1$$

(2) (1)の結果より $g(x)=(2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)$ であり，また $f(0)=0$ である．

$F(x)=x^2-f(x)$ とおくと，$F'(x)=2x-f'(x)=2x-\int_0^x g(t)\,dt$ より

$$\begin{aligned} F''(x) &= 2-g(x) \\ &= 2-(2-x)e^{-x}+\pi\sin(\pi x) \\ &= 2(1-e^{-x})+xe^{-x}+\pi\sin(\pi x) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ より $1-e^{-x} \geqq 0$，$xe^{-x} \geqq 0$，$\sin(\pi x) \geqq 0$ なので $F''(x) \geqq 0$．

これと $F'(0)=0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ において $F'(x) \geqq 0$．

更にこれと $F(0)=0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ において $F(x) \geqq 0$．

次に $G(x)=f(x)-\left\{x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\right\}$ とおくと，$G'(x)=f'(x)-2x+\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3}{2}\right)x^2$，

$$\begin{aligned} G''(x) &= f''(x)-2+(\pi^2+3)x \\ &= g(x)-2+(\pi^2+3)x \\ &= (2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)-2+(\pi^2+3)x, \\ G'''(x) &= (x-3)e^{-x}-\pi^2\cos(\pi x)+\pi^2+3 \\ &= 3(1-e^{-x})+xe^{-x}+\pi^2\{1-\cos(\pi x)\} \end{aligned}$$

なので，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $G'''(x) \geqq 0$．

これと $G''(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G''(x)\geqq 0$.

更にこれと $G'(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G'(x)\geqq 0$.

最後にこれと $G(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G(x)\geqq 0$.

以上より

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\leqq f(x)\leqq x^2$$

であることが示された.

(3)　$x\to+0$ なので，$0<x<\dfrac{\pi}{4}(<1)$ としてよい.

このとき，このとき $\sin x>0$ より

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\leqq f(x)\leqq x^2$$

$$\iff \quad \frac{x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3}{x\sin x}\leqq\frac{f(x)}{x\sin x}\leqq\frac{x^2}{x\sin x}$$

$$\iff \quad \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\left\{1-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x\right\}\leqq\frac{f(x)}{x\sin x}\leqq\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

となり $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x\sin x}=1$ を得る.

《第２講　面積》

3　座標平面上を運動する点 $P(x(t),\ y(t))$ の座標が，次のように与えられているとする．

$$(x(t),\ y(t))=(F(t)\cos t,\ F(t)\sin t)$$

ここで，$F(t)=\int_0^t e^\theta \sin\theta d\theta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$t=0$，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ における点 P の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x(t)>0$，$y(t)>0$，$\dfrac{dy(t)}{dt}>0$ であることを示せ．

(3)　変数 t が $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき P によって描かれる曲線と，y 軸によって囲まれる図形の面積は，次の定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

の値と等しいことを示せ．

【答】　(1)　順に $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right)$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　(1)　$F(t)=\int_0^t e^\theta\sin\theta d\theta$ より $F(0)=0$ なので $t=0$ に対応する点 P は $(0,\ 0)$．

$\left\{\dfrac{1}{2}e^\theta(\sin\theta-\cos\theta)\right\}'=e^\theta\sin\theta$ より

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left[\dfrac{1}{2}e^\theta(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}$ なので $t=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 P は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$．

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left[\dfrac{1}{2}e^\theta(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ なので $t=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点 P は

$\left(0,\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right)$．

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $e^\theta\sin\theta>0$ なので，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $F(t)>0$ である．

また $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos t>0$，$\sin t>0$ なので $x(t)>0$，$y(t)>0$．

$y(t)=F(t)\sin t$ より

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt}&=F'(t)\sin t+F(t)\cos t\\&=e^t\sin t\times\sin t+F(t)\cos t\\&=e^t\sin^2 t+F(t)\cos t\end{aligned}$$

なので，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy(t)}{dt}>0$ となる．

(3)　$\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}=\alpha$ とおくと，(1)(2)の結果より求める面積は $\displaystyle\int_0^{\alpha} x\,dy$ となるが，$x=x(t)$，

$y=y(t)$ と置換積分することにより $dy=\dfrac{dy(t)}{dt}dt$，(1)より $y=\alpha$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$，$y=0$ のとき $t=0$ となることより

$$\int_0^{\alpha} x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}\,dt$$

であることが示された.

4 曲線 $x^2-y^2=-4$ のうち $y>0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

(2) $x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

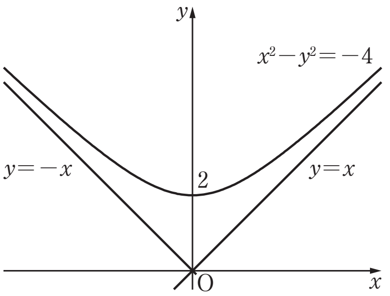
(3) p を正の数とし，C 上の点 $\left(p,\ \sqrt{p^2+4}\right)$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) $\lim_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) $2\log\dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$　(4) 2

【解説】 (1) 漸近線は $x^2-y^2=0$ より $y=\pm x$ であり，

$x^2-y^2=-4 \iff -\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ であることと $y>0$ より概形は下図．



(2) $x=e^t-e^{-t}$ より $\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}\ (>0)$ であり $\lim_{t\to\infty}x=\infty$，$\lim_{t\to-\infty}x=-\infty$ より x は任意の実数値をとることができる．

このことと，$x+y=2e^t$，$-x+y=2e^{-t}$ より

$$
\begin{aligned}
&x+y>0 \text{ かつ } -x+y>0 \text{ かつ } (x+y)(-x+y)=4\\
\iff\ & y>-x \text{ かつ } y>x \text{ かつ } x^2-y^2=-4\\
\iff\ & x^2-y^2=-4 \text{ かつ } y>0
\end{aligned}
$$

となることより，$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることが示された．

(3) C は $y=\sqrt{x^2+4}$ と表せる．また $x=0$ のとき $0=e^t-e^{-t}$ より $t=0$，正の数 p に対して $x=p$ のとき $e^t-e^{-t}=p$ より

$$
\begin{aligned}
p=e^t-e^{-t} \iff\ & e^{2t}-pe^t-1=0\\
\iff\ & e^t=\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\\
\iff\ & t=\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\ (\text{これを }\alpha\text{ とする})
\end{aligned}
$$

であり $e^\alpha+e^{-\alpha}=\sqrt{(e^\alpha-e^{-\alpha})^2+4}=\sqrt{p^2+4}$ なので

$$\begin{aligned}
S(p) &= \int_0^p \sqrt{x^2+4}\,dx - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= \int_0^\alpha \sqrt{(e^t-e^{-t})^2+4}\,(e^t+e^{-t})\,dt - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= \int_0^\alpha (e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= \left[\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})+2t\right]_0^\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= \left[\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})+2t\right]_0^\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= \frac{1}{2}p\sqrt{p^2+4}+2\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}\\
&= 2\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
S(p)-a\log p &= 2\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} - a\log p\\
&= \log\frac{p^2+2+p\sqrt{p^2+4}}{2} - \log p^a\\
&= \log\frac{1+\frac{2}{p^2}+\sqrt{1+\frac{4}{p^2}}}{2}p^{2-a}
\end{aligned}$$

なので $\lim_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=\begin{cases}\infty & (a<2\text{ のとき})\\ 0 & (a=2\text{ のとき})\\ -\infty & (a>2\text{ のとき})\end{cases}$　となる.

よって求める a の値は $a=2$.

《第３講　積分評価》

5　a を自然数とする.

(1)　すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)　$a \geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ.

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3)　級数の極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ.

【答】　(1)　略　　(2)　$b=1$，$c=-1$

(3)
$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}=\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!} & (a\geqq 2\text{ のとき})\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}\text{ は発散する.} & (a=1\text{ のとき})\end{cases}$$

【解説】　(1)　$k(k+1)\cdots(k+a-1)$

$$=\frac{1}{a+1}\{k(k+1)\cdots(k+a-1)(k+a)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+a-1)\}$$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+1}\{k(k+1)\cdots(k+a-1)(k+a)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+a-1)\}$$

$$=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)
$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{b(n+a-1)+cn}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

$$=\frac{(b+c)n+b(a-1)}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

なので，$(b+c)n+b(a-1)$ がすべての n に関して $a-1$ と等しくなるので，$a-1\geqq 1$ より

$$b+c=0 \text{ かつ } b(a-1)=a-1 \quad \therefore\ b=1,\ c=-1$$

(3)　$a \geqq 2$ のとき，(2)より

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+a-1)}\right\}\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{(a-1)!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}\right\}\\
=\;&\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!}
\end{aligned}
$$

$a=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

であるが，k を 1 以上の整数とするとき $k<x$ において $\frac{1}{k}>\frac{1}{x}$ より

$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ つまり $\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ となるので

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &> \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\\
&= \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\\
&= \Big[\log x\Big]_1^{n+1}\\
&= \log(n+1) \to \infty \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

よって $a=1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$ は発散する．

以上より
$$
\begin{cases}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}=\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!} & (a\geqq 2\text{ のとき})\\
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}\text{ は発散する．} & (a=1\text{ のとき})
\end{cases}.
$$

6　各自然数 n に対して，初項 $n-1$，公差 2 の等差数列を考える．この等差数列の最初の n 項の和を a_n とする．以下の問いに答えよ．

(1)　a_n を n の式として表せ.

(2)　自然数 $k \geqq 1$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の和

$$S(k)=\sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k の式として表せ.

(3)　$S(k)$ を(2)で定めた和とする．次の等式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

を示せ.

【答】　(1)　$2n(n-1)$　　(2)　$\dfrac{2}{3}(k-1)k(k+1)$　　(3)　略

【解説】　(1)　初項 $n-1$，公差 2 より第 n 項は $(n-1)+(n-1)\times 2=3(n-1)$ となるので

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n\times\{(n-1)+3(n-1)\}}{2} \\ &= 2n(n-1) \end{aligned}$$

(2)　$a_n=2n(n-1)$ より

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{n=1}^{k} 2n(n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{k}\frac{2}{3}\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\} \\ &= \frac{2}{3}(k-1)k(k+1) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)} &= \sum_{k=2}^{m}\frac{3k}{2(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left\{2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}-\frac{3}{2}\right\} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

ここで $k<x<k+1$ のとき $\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$ より

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$ つまり $\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ が成り立つので

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{m-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-1<\int_1^{m}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\quad\cdots①$$

となる. $\displaystyle\int_1^m \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^m=\log m$ と①より $\displaystyle\log m+\frac{1}{m}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}<\log m+1$

以上より

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{m\log m}\right)-\frac{1}{\log m}\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right)\\
<\quad&\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}\\
<\quad&\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\log m}\right)-\frac{1}{\log m}\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right)
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

が示された.

《第４講　体積，複素数》

7　$f(x)=e^x\sin x$，$g(x)=a\sin x$ とする．ただし a は 0 以上の実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　b を定数とし

$$I=\int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx,\quad J=\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx$$

とおく．このとき，

$$I+J=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b,\quad I-J=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$$

が成り立つことを示し，I と J を求めよ．

(2)　$f(x)=g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ．

(3)　(2)で求めた実数を x_0 とする．$0\leqq x\leqq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

【答】　(1)　$I=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b+e^{2b}\cos 2b-1)$，$J=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b-e^{2b}\cos 2b+1)$

(2)　$\begin{cases}\pi & (0\leqq a\leqq 1,\ a\geqq e^{\pi}\text{ のとき})\\ \log a & (1<a<e^{\pi}\text{ のとき})\end{cases}$

(3)　$\begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{2}a^2+\dfrac{\pi e^{2\pi}}{8}-\dfrac{\pi}{8} & (0\leqq a\leqq 1\text{ のとき})\\ \dfrac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a)-a^2\sin(2\log a)+4a^2\log a-2a^2+1\} & (1<a<e^{\pi}\text{ のとき})\\ \dfrac{\pi^2}{2}a^2-\dfrac{\pi e^{2\pi}}{8}+\dfrac{\pi}{8} & (a\geqq e^{\pi}\text{ のとき})\end{cases}$

【解説】　(1)　$\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\right)'=e^{2x}\sin 2x+e^{2x}\cos 2x$ なので

$$\begin{aligned}I+J &= \int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx+\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx\\ &= \int_0^b (e^{2x}\sin 2x+e^{2x}\cos 2x)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\right]_0^b=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b\end{aligned}$$

同様に，$\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right)'=e^{2x}\cos 2x-e^{2x}\sin 2x$ より

$$\begin{aligned}I-J &= \int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx-\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx\\ &= \int_0^b (e^{2x}\cos 2x-e^{2x}\sin 2x)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right]_0^b=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)\end{aligned}$$

また，$2I=(I+J)+(I-J)=\dfrac{1}{2}e^{2b}\sin 2b+\dfrac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$ なので

$I=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b+e^{2b}\cos 2b-1)$.

$2J=(I+J)-(I-J)=\dfrac{1}{2}e^{2b}\sin 2b-\dfrac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$ なので

$J=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b-e^{2b}\cos 2b+1)$.

(2)　$e^x\sin x=a\sin x \iff (e^x-a)\sin x=0$ なので $e^x=a$ または $\sin x=0$．ここで
$\sin x=0$ の正の最小の解は $x=\pi$ である．

$0\leqq a\leqq 1$ のとき，$e^x=a$ は正の実数解をもたないので，$f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\pi$.

$1<a<e^\pi$ のとき，$e^x=a$ は π より小さい正の実数解をもつので $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\log a$.

$a\geqq e^\pi$ のとき，$e^x=a$ の正の実数解は π 以上となるので $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\pi$.

以上より $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $\begin{cases}\pi & (0\leqq a\leqq 1,\ a\geqq e^\pi \text{ のとき}) \\ \log a & (1<a<e^\pi \text{ のとき})\end{cases}$.

(3)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき，$0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)\geqq g(x)(\geqq 0)$ なので

$$\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^\pi \pi\{f(x)\}^2dx-\int_0^\pi \pi\{g(x)\}^2dx \\
&= \pi\int_0^\pi (e^{2x}\sin^2 x-a^2\sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^\pi \left(e^{2x}\times\frac{1-\cos 2x}{2}-a^2\times\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2x}\cos 2x\,dx+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-a^2\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}(e^{2\pi}\sin 2\pi+e^{2\pi}\cos 2\pi-1)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\pi}-a^2\pi-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{2}a^2+\frac{\pi e^{2\pi}}{8}-\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$1<a<e^\pi$ のとき，$0\leqq x\leqq\log a$ において $g(x)\geqq f(x)(\geqq 0)$ なので，同様に

$$\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^{\log a}\pi\{g(x)\}^2dx-\int_0^{\log a}\pi\{f(x)\}^2dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\log a}e^{2x}\cos 2x\,dx-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-a^2\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\log a} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}\{e^{2\log a}\sin(2\log a)+e^{2\log a}\cos(2\log a)-1\} \\
&\qquad -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{2\log a}-a^2\left(\log a-\frac{1}{2}\sin(2\log a)\right)-\frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a)-a^2\sin(2\log a)+4a^2\log a-2a^2+1\}
\end{aligned}$$

$a \geqq e^{\pi}$ のとき，$0 \leqq x \leqq \pi$ において $g(x) \geqq f(x)\,(\geqq 0)$ なので

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^{\pi} \pi\{g(x)\}^2\,dx - \int_0^{\pi} \pi\{f(x)\}^2\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{2}a^2 - \frac{\pi e^{2\pi}}{8} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

以上より，

$$V(a) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{2}a^2 + \dfrac{\pi e^{2\pi}}{8} - \dfrac{\pi}{8} & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a) - a^2\sin(2\log a) + 4a^2\log a - 2a^2 + 1\} & (1 < a < e^{\pi} \text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi^2}{2}a^2 - \dfrac{\pi e^{2\pi}}{8} + \dfrac{\pi}{8} & (a \geqq e^{\pi} \text{ のとき}) \end{cases}$$

8　複素数 α，β，γ が表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，C とし，複素数平面の原点を O で表す．ただし，A≠B，A≠O とする．以下の問いに答えよ．

(1)　方程式 $\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線であることを示せ．

(2)　$|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，方程式 $z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$ を満たすことを示せ．

(3)　$|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は，方程式 $z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$ を満たすことを示せ．

【答】　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　(1)　$\alpha\neq0$ より

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1 \iff \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}$$
$$\iff z\overline{z}=z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$$
$$\iff z\overline{z}=(z-\alpha)\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right)$$
$$\iff |z|^2=|z-\alpha|^2$$

となるので $|z|=|z-\alpha|$．よって z の表す点の軌跡は OA の垂直二等分線である．

(2)　$z-\alpha$ が $\beta-\alpha$ の実数倍になるので，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数．よって

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} \iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$
$$\iff z-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right) \quad \cdots①$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|=1$ より

$$\begin{aligned}\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}+\alpha\beta &= \frac{\beta-\alpha+\alpha\beta\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\ &= \frac{\beta\left(1-|\alpha|^2\right)-\alpha\left(1-|\beta|^2\right)}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\ &= 0\end{aligned}$$

つまり $\dfrac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=-\alpha\beta$ となるので

$$\begin{aligned}① \iff z-\alpha &= -\alpha\beta\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right)\\ &= -\alpha\beta\overline{z}+|\alpha|^2\beta\\ &= -\alpha\beta\overline{z}+\beta\end{aligned}$$

より $z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$ が示された．

(3)　$z-\gamma$ が $(\beta-\alpha)i$ の実数倍になるので，$\dfrac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}$ が実数．よって

$$\frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}=\overline{\left\{\frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}\right\}} \iff \frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}=\frac{\overline{z}-\overline{\gamma}}{\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(-i)}$$

$$\iff z-\gamma=-\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\left(\overline{z}-\overline{\gamma}\right)$$

となるが，(2)と同様に $-\dfrac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=\alpha\beta$ となるので

$$z-\gamma=\alpha\beta\left(\overline{z}-\overline{\gamma}\right) \iff z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$$

が示された．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。